

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JOSETTE PEYRARD

Risque, rendement et évaluation des actifs financiers

Journal de la société statistique de Paris, tome 114 (1973), p. 113-129

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1973__114__113_0

© Société de statistique de Paris, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RISQUE, RENDEMENT ET ÉVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS

This article shows the recent development of the concept of risk, of the estimate and of weight of risk in the value of financial assets. When the risk and the different ways of estimate are determinated, we study how to decrease the risk in diversifying the stocks. Afterwards, the balance situation is analysed in a efficient market, and the best financial choice is precised in the plan of a theoretical system of assets estimate.

Dieser Artikel zeigt die neueste Entwicklung der Auffassung des Risikos, seine Abschätzung und die Tragweite des Risikos in der Einschätzung der finanziellen Aktiva. Nach einer Definition des Risikos, und der verschiedenen Methoden seiner Abschätzung untersucht der Verfasser die Möglichkeiten einer Verringerung des Risikos, indem man Wertpapiere der verschiedensten Art erwirbt. Daraufhin untersucht man die Natur eines Gleichgewichts einer gegebenen Börse und definiert ein finanzielles Optimum im Rahmen eines theoretischen Modelles der Abschätzung der Aktiva.

Este artículo muestra la evolución reciente del concepto de riesgo, de la estimación y del alcance del riesgo en la evaluación de haberes financieros. Después de definir el riesgo y los diferentes métodos de evaluación, se estudian como reducir el riesgo diversificando los títulos. Después se analiza la situación de equilibrio en un mercado eficiente y se precisa el modelo financiero optimo elegido en el marco de un modelo teórico de evaluación de los haberes.

Un courant théorique important s'est développé durant les dernières années pour tenter d'intégrer le risque dans le calcul économique et ainsi tenir compte des situations dans lesquelles l'agent économique n'a pas une connaissance parfaite de l'avenir.

Dans le domaine financier, les prévisions jouent un grand rôle, puisque le prix des actions intègre les anticipations de résultats futurs. Le risque doit être calculé pour décider de l'investissement et le choix se portera sur les titres présentant le risque minimum, pour un même rendement.

Notre objet ne sera pas, dans cet article, de donner une présentation complète des théories du risque, mais plutôt de montrer l'évolution récente du concept de risque, de l'estimation et de la portée du risque dans l'évaluation des actifs financiers.

Après avoir défini le risque, les différentes méthodes d'évaluation seront développées dans une première partie. La deuxième partie sera consacrée à l'étude des moyens de réduire le risque en diversifiant les titres. La troisième partie étudiera la situation d'équilibre dans un marché efficient et précisera le choix financier optimum dans le cadre d'un modèle théorique d'évaluation des actifs.

*
* *

On distingue généralement le risque et l'incertitude : le risque caractérise une situation actuelle dont les résultats futurs peuvent être différents, mais où l'on connaît à l'avance les probabilités attachées à ces différents résultats.

L'incertitude au contraire correspond à une situation dans laquelle les résultats futurs peuvent également être différents, mais les probabilités de ces résultats ne peuvent être déterminés objectivement à l'avance.

La notion de « quasi risque », introduite par J.-T. Porterfield ⁽¹⁾, se différencie du risque véritable car les probabilités des résultats sont définies de façon subjective et non objective : le choix d'investissements, par exemple, entraîne des distributions de dépenses et recettes futures dont les probabilités ne sont pas connues objectivement, mais les investisseurs sont susceptibles d'attribuer des probabilités subjectives aux différentes éventualités.

I. LES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ÉVALUATION DU RISQUE

Plusieurs approches à l'analyse du risque ont été proposées par les auteurs modernes ⁽²⁾.

L'approche par l'espérance mathématique et la variance a précisé l'analyse traditionnelle des projets d'investissement basée sur le seul rendement.

La théorie de l'utilité, basée sur la notion d'utilité marginale décroissante de la monnaie a inspiré deux autres approches :

- la méthode des équivalents certains qui permet de remplacer un flux incertain par son équivalent certain et d'évaluer des actifs risqués;
- l'ajustement par le risque des taux d'actualisation.

Enfin, plus récemment, W. F. Sharpe a précisé le concept de risque en tentant de trouver une mesure du risque plus opérationnelle.

1.1. L'approche du risque par l'espérance mathématique et la variance

L'étude de la mesure du risque par l'écart-type sera menée avant d'exposer la théorie de l'utilité qui combine les deux paramètres : espérance mathématique et écart type des rendements.

Le risque d'un actif s'exprime souvent en termes de variations de rendement ⁽³⁾. Cependant, pour mieux préciser ce concept, on suppose connues les distributions de probabilités de rendement attendu des différents actifs. Le tableau I regroupe le rendement attendu de deux titres s'il y a expansion, récession ou stagnation de l'économie, ainsi que les probabilités d'apparition de ces états.

L'espérance mathématique de rendement est égale à 10 pour les deux titres, mais les distributions de probabilité laissent supposer que le titre 2 est plus risqué que le titre 1. C'est l'écart type de la distribution qui permet de classer les deux projets d'après leur risque

$$(\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 10).$$

1. J.-T. PORTERFIELD, *Coût du capital et choix des investissements*, Dunod, Paris, 1969.

2. M. FRIEDMAN et L. J. SAVAGE, *The Utility Analysis of Choices involving risk*, Journal of Political Economy, août 1958, pp. 279-306.

D.-B. HERTZ, *Risk Analysis in Capital Investment*, Harvard Business Review, janvier février 1964, pp. 95-106.

W.-F. SHARPE, *Risk aversion in the stock Market : Some Empirical evidence*, Journal of Finance, décembre 1966, pp. 416-423; *Capital Asset Prices : A theory of Market Equilibrium under conditions of Risk*, Journal of Finance, septembre 1964, pp. 425-442.

R. O. SWALM, *Utility theory—Insights into Risks Taking*, Harvard Business Review, novembre-décembre 1966, pp. 123-136.

3. Nous entendons par rendement la somme du rendement en dividendes et de la plus-value

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}$$

où P représente le cours de l'action et D le dividende.

TABLEAU I

	Probabilité d'apparition (1)	Rendement (2)	(3) = (1) × (2)
<i>Titre 1</i>			
Récession	0,2	8	2,4
Stagnation	0,6	10	5
Expansion	0,2	12	2,6
			10,0
<i>Titre 2</i>			
Récession	0,2	0	0
Stagnation	0,6	10	6
Expansion	0,2	20	4
			10

Lorsque les titres ont une espérance mathématique différente, on prend comme mesure du risque le coefficient de variation ν qui est le rapport entre l'écart type et le rendement moyen \bar{R}

$$\nu = \frac{\sigma}{\bar{R}}$$

M. Markowitz et J. Tobin ont formalisé la prise en considération du risque par l'espérance et la variance de la distribution de probabilité du rendement des actifs ⁽¹⁾.

On suppose que les titres sont caractérisés par deux paramètres : l'espérance mathématique et la variance du rendement.

On suppose également que l'utilité d'une action est fonction croissante du rendement et fonction décroissante du risque.

La courbe d'indifférence (graphique 1a) sera la combinaison des espérances mathématiques et variances qui procurent la même satisfaction au détenteur de titres.

Par exemple, la combinaison *P* est supérieure à la combinaison *M* puisque, pour une même variance $V(R_1)$, le rendement moyen attendu est plus grand $[E(R_2)]$.

La courbe d'indifférence *U* indique le comportement du porteur de titres en face du risque :

$$U = f[E(R), \text{Var}(R)]$$

Si le porteur de titres aime le risque, la courbe d'utilité sera convexe par rapport à l'axe des abscisses, et inversement. S'il est indifférent au risque, sa courbe d'utilité sera une droite (graphique 1b).

On admet généralement que les agents économiques n'aiment pas le risque : l'utilité décroît lorsque le risque augmente :

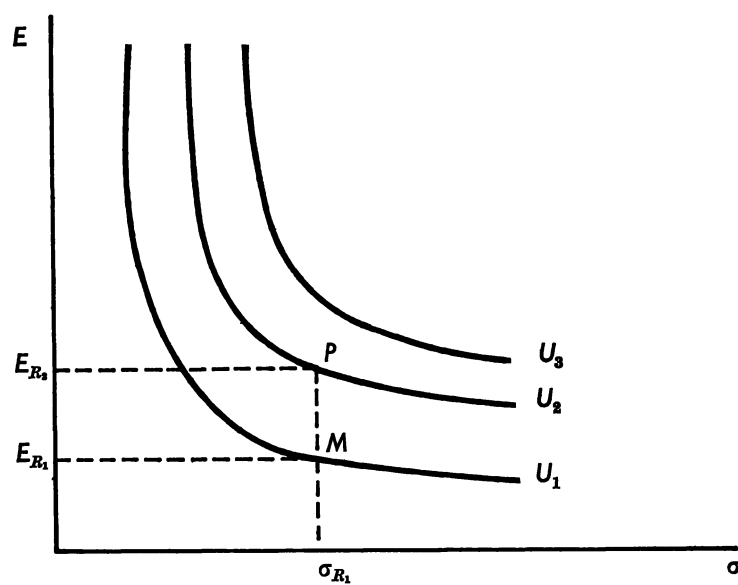
$$\frac{\delta f}{\delta \text{Var}(R)} < 0$$

et elle augmente avec le rendement

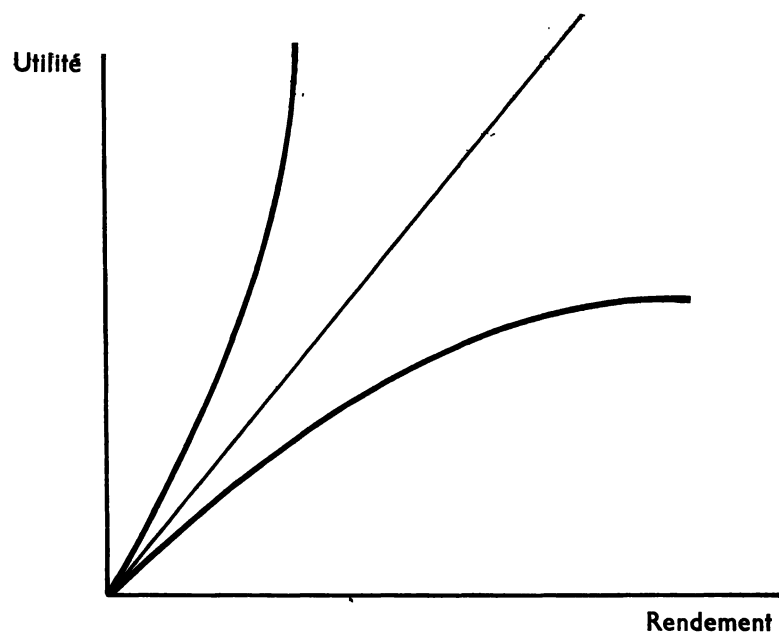
$$\frac{\delta f}{\delta E(R)} > 0$$

1. H. MARKOWITZ, *Portfolio Selection*, New York, Wiley, 1959.

J. TOBIN, *Liquidity preference as a behaviour toward Risk*, Review of Economic Studies, octobre 1957.



GRAPHIQUE 1a
Courbes d'indifférence



GRAPHIQUE 1b
Relation entre l'utilité et le rendement

La pente de la courbe d'indifférence peut être déterminée en utilisant la différentielle totale de la fonction. On peut écrire pour une même courbe d'utilité :

$$dU = f'_E dE + f'_V dV = 0$$

f'_E et f'_V représentant les dérivées partielles de la fonction d'utilité respectivement par rapport à l'espérance mathématique et à la variance.

$$\frac{dV}{dE} = -\frac{f'_E}{f'_V}$$

— La fonction d'utilité est généralement représentée par une fonction quadratique,

$$U = a + bR + cR^2$$

D'une part, cette forme satisfait les conditions d'utilité marginale positive et décroissante de la monnaie.

D'autre part, une fonction quadratique est souvent utilisée pour approximer des courbes plus complexes. Mais toutes ces raisons n'ont pas de justification théorique suffisante. On pourrait imaginer, au contraire qu'au delà d'un certain rendement attendu, le comportement du consommateur vis-à-vis du risque change ⁽¹⁾.

L'approche espérance-variance postule que les valeurs futures des titres sont des variables aléatoires dont les distributions de probabilité sont connues et ces probabilités sont supposées indépendantes à chaque période. En fait, les probabilités sont conditionnelles et dépendent de l'apparition des événements antérieurs.

Dans l'hypothèse où la distribution de rendement du titre ou du portefeuille est normale, l'approche espérance-variance se justifie car ces deux paramètres permettent de décrire toute la distribution ⁽²⁾. Si, au contraire les rendements ne sont pas normalement distribués, la connaissance de ces deux seuls paramètres ne suffit pas et la prise en considération des coefficients d'asymétrie, par exemple, s'impose.

1.2. La méthode des équivalents certains

Elle découle directement de la théorie de l'utilité. L'équivalent certain des points d'une courbe d'utilité U correspond au point d'intersection de cette courbe d'utilité avec l'axe des rendements attendus (graphique 3).

Ce point a une variance nulle et donc un rendement certain.

Dans la mesure où cette valeur serait simple à calculer, elle remplacerait la variance et l'espérance mathématique dans le choix des actions. Le portefeuille optimal serait celui dont l'équivalent certain serait le plus élevé.

La valeur actualisée VA d'un flux de rendements incertains R_t est donnée par l'équation :

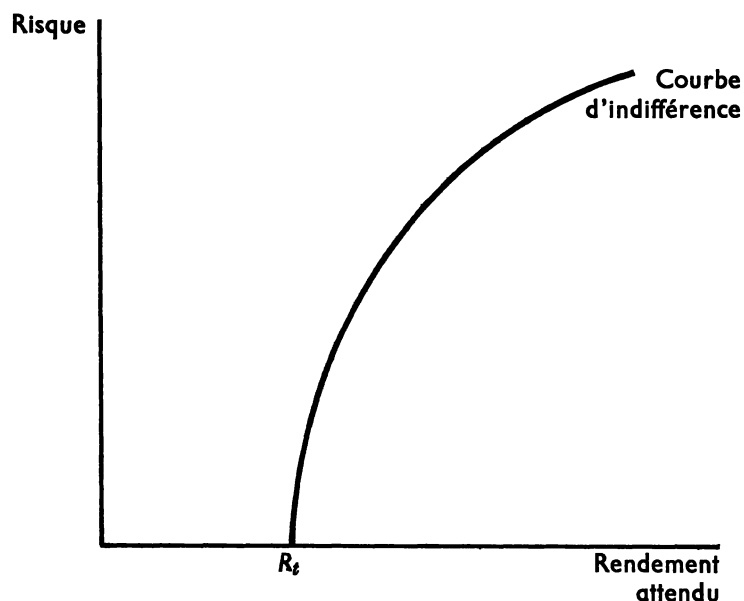
$$VA = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{R_t}{(1+k)^t} \quad (1.2.1)$$

en désignant par k le taux du rendement requis, étant donné les caractéristiques de risque des différents revenus.

1. Cf. *Critiques concernant l'hypothèse d'une fonction quadratique*, dans S. C. KOLM, pp. 34 et suivantes. *Les choix financiers et monétaires*, Paris, Dunod, 1966.

2. Une justification formelle du seul emploi de la variance et de l'écart-type est donnée par W. S. J. VAN NEEUWENHUIZEN dans *The Analytical Theory of Finance* Holt Rinehart et Winston, 1970. Cet auteur applique la formule de Taylor à la fonction d'utilité $U = U(V)$ et prend comme constante l'espérance mathématique.





GRAPHIQUE 3
Équivalent certain

R_t^* sera l'équivalent-certain (certainty-equivalent) d'un revenu R_t , si un agent économique est prêt à échanger R_t , revenu incertain contre R_t^* , revenu certain. Le rapport d'échange α_t sera :

$$\alpha_t = \frac{R_t^*}{R_t} \quad (1.2.2)$$

Pour avoir un rendement certain au temps t , l'agent économique sera disposé à payer :

$$\frac{R_t^*}{(1+i)^t}$$

La valeur du flux de rendement attendu est :

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\alpha_t R_t}{(1+i)^t} \quad (1.2.3)$$

En égalisant (1.2.1.) et (1.2.3.) :

$$\frac{R_t}{(1+k)^t} = \frac{R_t^*}{(1+i)^t} = \frac{\alpha_t R_t}{(1+i)^t}$$

d'où

$$\alpha_t = \frac{(1+i)^t}{(1+k)^t} \quad (1.2.4)$$

Le facteur d'ajustement α_t , fonction du degré d'aversion du risque, permet d'obtenir l'équivalent certain d'un rendement incertain. Ce facteur sera nul lorsque le risque devient trop élevé ⁽¹⁾.

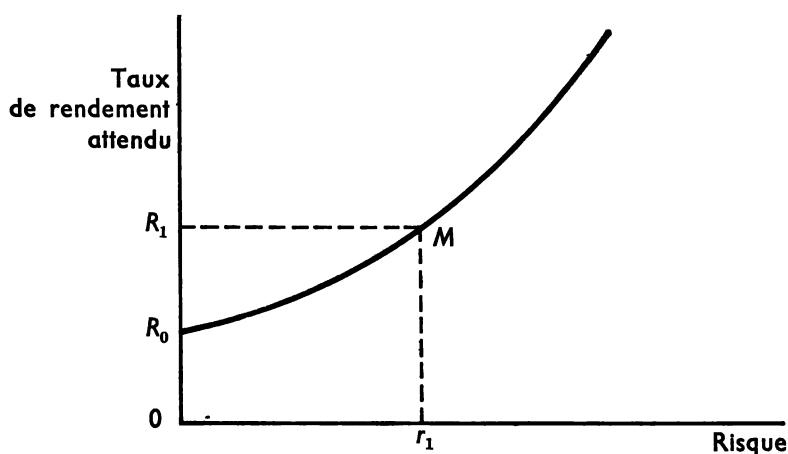
1. F. W. WESTON et E. F. BRIGHAM, *Managerial Finance*, Holt, Rinehart Winston Inc., 1972, p. 197.

Cependant, le calcul de α_t dépend de la connaissance de k , or k est susceptible de varier dans le temps et dépend de l'importance du budget financier et de l'état du marché des capitaux.

1.3. La méthode des taux d'actualisation ajustés par le risque

Cette méthode consiste à adopter un taux d'actualisation différent dans les calculs selon le risque attaché au titre ou au portefeuille ⁽¹⁾.

Dans le plan R, T , la courbe d'indifférence du marché fait apparaître le taux de substitution entre le risque et le rendement. Pour un accroissement Or_1 du risque, l'accroissement du taux de rendement attendu est R_0R_1 (graphique 4). R_0R_1 est appelé prime de risque.



GRAPHIQUE 4
Taux de rendement attendu et risque

Lors du choix d'actions, les calculs de valeur actualisée utiliseront des taux d'actualisation différents selon les caractéristiques de risque et de rendement attendu. Trois méthodes sont possibles :

— Dans une première méthode, on décompose le facteur d'actualisation $\frac{1}{1+k}$ en deux parties : un facteur fonction du temps $\frac{1}{1+i}$, et un facteur fonction du risque r ,

$$\frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+i} r$$

La valeur actualisée VA_R des revenus R_t sera

$$VA_R = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} r^t R_t$$

1. A. ROBICHEK et S. C. MYERS, *Conceptual Problems in the Use of Risk Adjusted Discount Rates*, *Journal of Finance*, décembre 1966, pp. 727-730.

Le choix des titres à définir se fera d'après les valeurs actualisées attendues. Dans cette méthode cependant, le facteur risque suit une progression géométrique et semble avoir un rôle accru, à moins que le risque ne soit perçu comme une fonction croissante du temps ⁽¹⁾.

— Une autre méthode consiste à utiliser un taux d'intérêt sans risque i et à multiplier chaque revenu attendu R_t par un facteur d'ajustement a_t incorporant le risque :

$$VA_R = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} a_t R_t$$

Cette deuxième méthode se rapproche de la méthode des équivalents certains où $a_t R_t$ serait l'équivalent certain.

— Une dernière méthode consiste à spécifier un taux d'actualisation k fonction du coefficient de variation du titre $\frac{\sigma}{R}$:

$$k = i + \gamma \frac{\sigma}{R}$$

γ traduit l'accroissement de k qui correspond à un accroissement donné du coefficient de variation.

Cette relation suppose implicitement que les variations de chaque titre sont indépendantes de celles des autres, ou qu'il n'y a pas de diversification dans le portefeuille, or cette diversification est essentielle pour la réduction du risque ⁽²⁾.

Dans la pratique est souvent utilisée la première méthode de calcul de taux d'actualisation ajustés par le risque qui traite implicitement le risque comme une variable croissant avec le temps, pour une raison de simplicité des calculs.

1.4. La décomposition du risque

Au lieu de considérer le risque comme un tout indissociable, W. F. Sharpe divise le risque d'un titre en deux composantes : le risque systématique et le risque non systématique ⁽³⁾.

Le risque systématique indique la réaction de l'action aux variations de rendement de l'ensemble des actions du marché. Ce risque systématique mesure en quelque sorte l'élasticité du rendement de l'action par rapport au rendement moyen des actions du marché. Ce risque ne peut être supprimé par la diversification des titres, et est appelé parfois risque non diversifiable.

Le risque non systématique ou diversifiable est le risque spécifique attaché à un titre défini et indépendant des fluctuations du marché.

Sharpe a mesuré la sensibilité du marché (market sensitivity) par la pente de la droite de régression reliant l'accroissement relatif du rendement d'une action (ou d'un portefeuille) et l'accroissement relatif du rendement des actions du marché.

La pente β de cette droite mesure le risque systématique (graphique 5).

1. C'est la justification qu'apporte à cette méthode H. Y. CHEN dans son article, *Valuation under uncertainty*, Journal of financial and Quantitative Analysis, septembre 1967, pp. 313-326.

2. F. ROSENFELD, *Analyse financière et gestion des portefeuilles*, Dunod, 1972, p. 288 et suivantes.

3. W. F. SHARPE, *Portfolio Theory and Capital Markets*, Mac Graw Hill, 1970, p. 155.

Si un titre j a un facteur β de risque, le taux de rendement de ce titre variera en moyenne de β %, quand le taux de rendement du marché varie de 1 %. Si R_j est le taux de rendement du titre j , R_M le taux de rendement du marché

$$\beta_j = \frac{\text{Cov}(R_j, R_M)}{\text{Var } R_M}$$

puisque β_j est le coefficient de la pente de la droite de régression.

En exprimant la covariance et la variance en fonction des rendements :

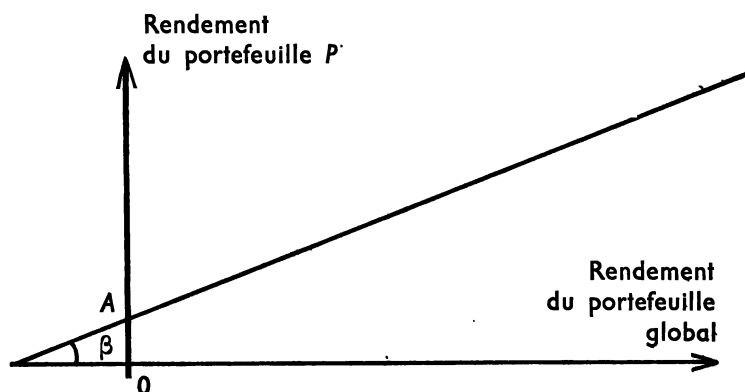
$$\beta_j = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{jt} - \bar{R}_j) (R_{Mt} - \bar{R}_M)}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{Mt} - \bar{R}_M)^2}$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{t=1}^T (R_{jt} - \bar{R}_j) (R_{Mt} - \bar{R}_M)}{\sum_{t=1}^T (R_{Mt} - \bar{R}_M)^2}$$

où \bar{R}_M et \bar{R}_j désignent respectivement le taux de rendement moyen du marché M et du titre j et T la période de temps étudiée.

Le portefeuille du marché représente tous les investissements possibles du marché financier. Son rendement sera calculé à partir de l'indice global des cours des actions ⁽¹⁾. Le risque représenté par ce portefeuille est inévitable car non diversifiable.

Pour un portefeuille individuel P , le facteur de risque β est égal à la moyenne pondérée des différents facteurs β des actions qui le composent. Le résultat attendu du portefeuille global serait nul est représenté par $OA = \alpha$ (graphique 5).



GRAPHIQUE 5
Coefficient de risque

Quand le marché boursier est en hausse, les actions ayant un facteur β élevé augmenteront plus que celles dont le facteur β est plus faible.

Si les portefeuilles individuels sont diversifiés, le risque attaché à ces portefeuilles dépendra non seulement de la dispersion des rendements des actions, mais également de la covariance des actions entre elles.

1. Sur le calcul des nombres-indices des cours de bourse, cf. F. ROSENFELD, *op. cit.*, pp. 172-176.

2. DIVERSIFICATION DES TITRES ET RÉDUCTION DU RISQUE

L'étude du risque sera d'abord faite à partir de 2 actifs A et B puis étendue au cas de n actifs.

2.1. Le cas de 2 actifs

Le risque d'un portefeuille de deux actifs A et B peut-être défini comme l'écart type σ_P des rendements de ce portefeuille P . Si ce portefeuille comporte une proportion x de titres A et $(1 - x)$ de titres B :

$$\sigma_P = \sqrt{x^2 \sigma_A^2 + (1 - x)^2 \sigma_B^2 + 2 x (1 - x) \text{cov}_{AB}} \quad (2.1.1)$$

où σ_A et σ_B désignent respectivement l'écart type des titres A et B .

Soit ρ_{AB} le coefficient de corrélation entre A et B :

$$\text{cov}_{AB} = \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B \quad (2.1.2)$$

$$\sigma_P = \sqrt{x^2 \sigma_A^2 + (1 - x)^2 \sigma_B^2 + 2 x (1 - x) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B} \quad (2.1.3)$$

Cette équation indique dans quelle mesure le risque du portefeuille P dépend des écarts types des titres détenus et de leur covariance.

— Si le coefficient de corrélation ρ_{AB} est égal à 1, c'est-à-dire si les rendements des titres sont parfaitement corrélés, alors le risque du portefeuille P est :

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \sqrt{x^2 \sigma_A^2 + (1 - x)^2 \sigma_B^2 + 2 x (1 - x) \sigma_A \sigma_B} \\ \sigma_P &= x \sigma_A + (1 - x) \sigma_B \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse où les écarts type de A et de B sont égaux :

$$\sigma_P = \sigma_A = \sigma_B$$

il n'y a donc aucune réduction de risque provenant de la diversification des titres.

— Si les variations de rendement de A et B sont indépendantes, $\rho_{AB} = 0$

$$\sigma_P = \sqrt{x^2 \sigma_A^2 + (1 - x)^2 \sigma_B^2}$$

Si le coefficient de corrélation est positif, l'écart type du portefeuille P est supérieur à l'écart type du cas précédent et inversement, si le coefficient de corrélation est négatif.

Il existe un cas dans lequel le risque peut être complètement éliminé :

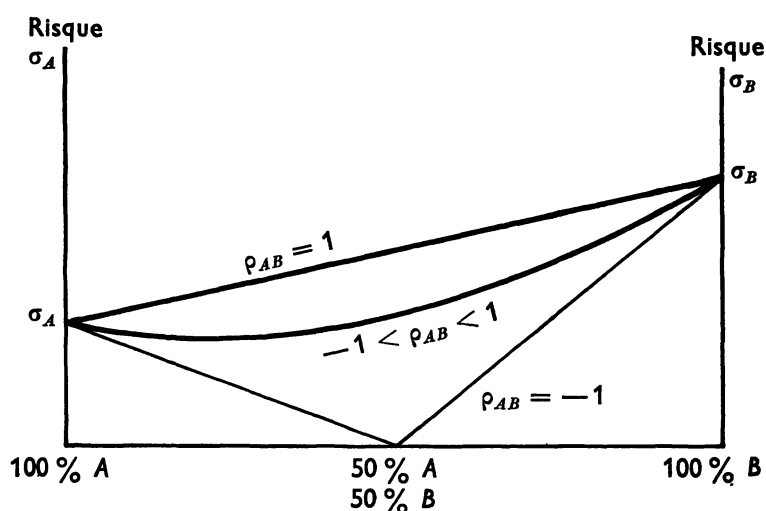
Lorsque le coefficient de corrélation est égal à -1 et lorsque le 3^e terme sous le radical de l'équation (2.1.3) est égal à l'opposé de la somme des deux autres.

Le graphique 6 représente le risque d'un portefeuille de deux actions ayant des écarts type différents (σ_A/σ_B). Ainsi qu'il a été montré par le calcul, le risque du portefeuille P est une combinaison linéaire du risque des deux actions dans le seul cas où la corrélation est parfaite ($\rho_{AB} = 1$).

2.2. La généralisation au cas de n titres

Markowitz a étendu la théorie précédente au cas de n actifs.

Le portefeuille efficient de titres risqués est celui qui regroupe les combinaisons d'actifs procurant le rendement maximum pour un même risque.



GRAPHIQUE 6
Risque d'un portefeuille de 2 actions A et B

L'espérance mathématique du rendement du portefeuille de n actifs est la moyenne pondérée des différents rendements des titres qui le composent.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$

Markowitz utilise comme mesure du risque la variance du portefeuille T^2

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Le choix de la série efficiente de portefeuille s'effectuera comme dans le cas précédent, en remplaçant toutefois l'écart type par la variance ⁽¹⁾.

Cette approche du risque dans un portefeuille diversifié simplifiera l'étude de l'équilibre sur le marché financier.

* * *

3. LA SITUATION D'ÉQUILIBRE

En situation d'équilibre, les rendements des titres doivent être tels que chaque détenteur ne peut améliorer sa satisfaction en échangeant un titre contre un autre. Il découle de cette proposition que les caractéristiques des titres; cours, rendement et risque, et les préférences des individus représentés par les fonctions d'utilité serviront à la détermination de cet équilibre.

On distinguera d'abord la situation dans laquelle il n'y a pas de possibilités de prêt, ni d'emprunts, puis l'équilibre du marché financier sera étudié en introduisant ces possibilités.

1. Markowitz a ensuite remplacé la variance par la semi-variance, qui est la moyenne des carrés des écarts négatifs, et qui rend mieux compte de l'aversion du risque des individus mais cela complique les calculs.

3.1. En l'absence de possibilité d'emprunts et de prêts, le choix du portefeuille individuel se fera en deux étapes :

- la détermination des portefeuilles possibles;
- la sélection du portefeuille optimal.

3.1.1. La détermination des portefeuilles possibles.

Étant donné les contraintes de budget B_t et les prix P_t des actions, les portefeuilles possibles devront satisfaire

$$\sum_t P_t x_t \leq B_t$$

x_t étant le nombre d'actions.

L'espérance mathématique E_P du portefeuille est égale à la somme pondérée des espérances mathématiques des actions.

S'il y a deux titres :

$$E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2$$

S'il y a plusieurs titres :

$$E_P = \sum_t x_t E_t$$

La variance du portefeuille P est calculée à partir de la variance des différents titres et de la covariance des titres supposées connues.

Pour un portefeuille composé de 2 titres :

$$\sigma^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \text{cov}_{12}$$

Pour un portefeuille de plusieurs titres

$$\sigma^2 = \sum_t \sum_j x_t x_j \text{cov}_{tj}$$

L'ensemble des portefeuilles possibles peut-être délimité dans l'espace espérance-mathématique-variance.

3.1.2. Le portefeuille optimal sera obtenu en maximisant l'équation

$$R_c = E_P - a \sigma_P^2$$

sous la contrainte de budget B_t :

$$\begin{aligned} \sum_t P_t x_t &\leq B_t \\ x_t &\geq 0 \end{aligned}$$

Graphiquement, cela revient à trouver le point de tangence de la droite d'équation $E_P = a\sigma^2 + R_c$ avec le domaine des portefeuilles efficients.

a est un paramètre qui peut varier et représente la pente de la droite E_P .

Étant donné l'ensemble des portefeuilles efficients et compte tenu de la contrainte de budget, la valeur R_c sera maximum lorsque la droite E_P sera tangente à l'ensemble LM . R_c représente le point d'intersection de cette droite avec l'axe des espérances mathématiques.

Le portefeuille correspondant au point T sera le portefeuille optimum.

Donc, en l'absence de possibilités de prêts, l'équilibre du portefeuille individuel résulte de la maximisation de l'utilité par le choix d'actifs risqués.

3.2. S'il existe des possibilités d'emprunts et de prêts sur le marché à des taux sans risque, les portefeuilles pourront se composer soit d'actifs certains, soit d'actifs risqués, soit d'une combinaison d'actifs certains et risqués.

3.2.1. Dans une première approche, il ne sera pas tenu compte des possibilités d'emprunt pour formaliser l'influence du risque sur le choix de la combinaison d'actifs, et le budget sera supposé fixe.

— Les caractéristiques du portefeuille résultent de la combinaison d'actifs risqués et non risqués. Si m est la proportion du budget disponible pour les titres investie en actifs certains, l'espérance mathématique E_P du portefeuille P sera :

$$E_P = m E_c + (1 - m) E_R \quad (3.2.1)$$

où E_c et E_R désignent respectivement l'espérance mathématique des actifs certains et des actifs risqués.

La relation existant entre l'espérance mathématique du portefeuille et la proportion d'actifs certains est donc une relation linéaire.

La variance du portefeuille P est :

$$\sigma_P^2 = (1 - m)^2 \sigma_R^2 + m^2 \cdot 0 = (1 - m)^2 \sigma_R^2 \quad (3.2.2)$$

car la variance d'un titre certain est nulle.

De l'équation (2.2.2) on déduit :

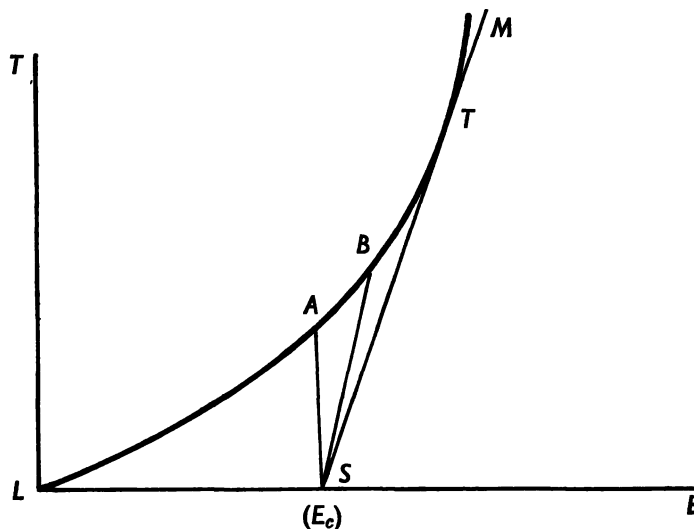
$$\sigma_P = (1 - m) \sigma_R$$

Ainsi le risque du portefeuille de titres diversifiés, exprimé par l'écart type, est proportionnel au risque des titres risqués.

Après la détermination des caractéristiques du portefeuille, il reste à préciser comment s'obtient, pour un individu, le portefeuille optimum.

L'ensemble des portefeuilles possibles est obtenu comme précédemment à partir de la contrainte de budget et des caractéristiques des titres du marché. L'individu qui désirerait investir seulement en titres risqués se trouverait sur la frontière LM du domaine des portefeuilles risqués possibles.

Au contraire, l'individu qui refuse le risque investirait en titres non risqués et son portefeuille aurait un rendement attendu E_c (graphique 7).



GRAPHIQUE 7

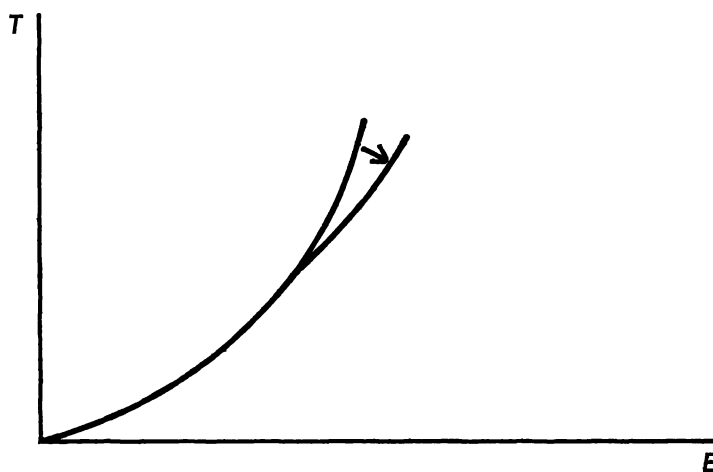
Combinaison d'actifs certains et d'actifs risqués

Entre l'achat exclusif de titres risqués et de titres certains, il existe une infinité de solutions possibles qui combinent ces deux sortes de titres.

Lorsque le paramètre m de l'équation (3.2.1) varie de 0 à 1, des droites SA , SB , $SC...$ sont engendrées qui représentent des combinaisons possibles d'actifs risqués et non risqués.

Cependant, les combinaisons optimales se trouvent sur la tangente ST menée de S à la frontière des portefeuilles possibles. En effet, il n'existe aucun portefeuille possible de même niveau de risque qui ait un rendement plus élevé. Cette droite est appelée droite des occasions d'investissement.

3.2.2. S'il existe des possibilités d'emprunt, l'ensemble des portefeuilles efficients est modifié. L'emprunt entraîne des espérances de rendement accru pour un même risque, à condition que le coût de l'emprunt soit inférieur au rendement attendu. Le graphique 8 illustre ce changement dans la frontière du domaine des portefeuilles possibles.



GRAPHIQUE 8

Modification du domaine des portefeuilles possibles en cas d'emprunt

Si l'on introduit les possibilités d'investir en actifs certains, la droite des occasions d'investissement est modifiée si les taux de prêt et d'emprunt sont différents; la pente de cette droite changera dès que l'emprunt est effectué.

Dans un but de simplification, on pose que les taux d'intérêt sont identiques pour les prêts et les emprunts. Ainsi la ligne des occasions d'investissement est une droite.

3.2.3. La réalisation de l'équilibre

La recherche de l'équilibre sera étudiée dans un marché efficient, c'est-à-dire un marché qui réunit certaines conditions :

- Le marché est transparent : les informations complètes sont disponibles pour tous les participants.

- Le prix de l'action reflète la valeur de l'action. Il est égal à la valeur actualisée des rendements futurs.

Dès lors, personne ne peut espérer de rendement supérieur à celui correspondant à sa prise de risque.

On admet généralement que le marché comporte des actifs non risqués, des possibilités d'emprunts et de prêts sans limite, à un taux unique.

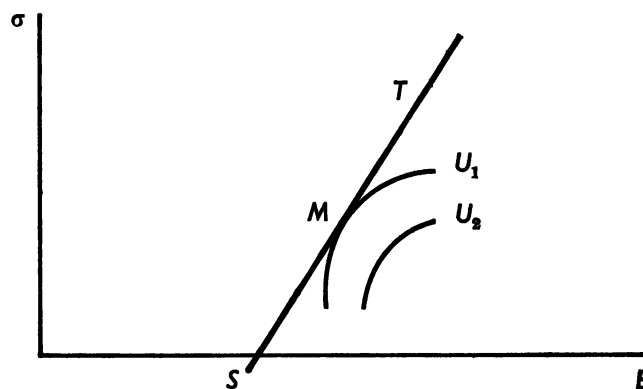
On suppose l'indifférence des détenteurs de titres entre les plus values et les gains en dividendes.

Dans un marché de concurrence parfaite, l'individu connaissant les prix des actions, leurs caractéristiques et sujet à sa contrainte de budget devra résoudre le problème de répartition des titres en titres certains, risqués et du montant de l'emprunt éventuel à effectuer.

La ligne ST des occasions d'investissement a été déterminée ci-dessus (graphique 8).

Le portefeuille optimal sera obtenu en tenant compte des préférences de l'individu, exprimées par les courbes d'utilité.

La solution graphique en est donnée par le graphique 9.



GRAPHIQUE 9
Détermination du portefeuille optimum

Si les courbes d'indifférence d'un individu sont U_1 et U_2 , le portefeuille optimal est M , point de tangence entre la ligne des occasions d'investissement et la courbe d'utilité U_1 . Pour obtenir ce portefeuille diversifié, il n'y aura pas de recours à l'emprunt.

Au contraire, si le point de tangence se trouve au-delà du point M , il y a recours à l'emprunt.

Si le point de tangence de la courbe d'indifférence et de la ligne des occasions d'investissement est en T , le portefeuille se compose exclusivement d'actifs risqués.

Dans l'hypothèse où les prévisions concernant les caractéristiques de risque sont identiques pour tous les individus, les lignes des occasions d'investissement auront la même pente et les portefeuilles optimaux se composeront de la même combinaison de titres.

L'ensemble de ces portefeuilles constitue le portefeuille du marché ou portefeuille global.

Il reste à préciser comment s'obtient la relation entre le rendement et le risque sur un marché.

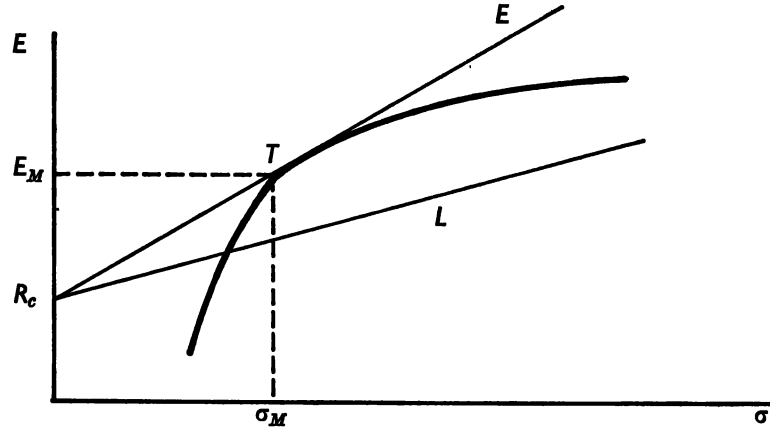
Le domaine des portefeuilles possibles du marché peut se représenter dans le plan σ , E (graphique 10).

Du point R_c , qui représente un rendement certain, on mène la tangente R_cT à la frontière du domaine. Cette tangente est le lieu des combinaisons de titres qui permet le

rendement attendu maximum E_M pour un risque donné σ_M . Elle est appelée « ligne de marché »⁽¹⁾. L'équation de cette ligne de marché s'écrit :

$$E = \frac{E_M - R_c}{\sigma_M} \sigma_P + R_c \quad (3.2.3)$$

où E_M et σ_M sont respectivement l'espérance mathématique et l'écart type du portefeuille du marché, R_c est le rendement certain et σ_P est l'écart type du portefeuille P .



GRAPHIQUE 10
Ensemble de portefeuilles possibles et Ligne de Marché

La pente de la droite E mesure le prix du risque à l'équilibre. Elle est égale au rapport entre la prime de risque (différence entre le rendement attendu du portefeuille optimum R_M et le rendement certain R_c) et la variance des rendements du portefeuille optimum.

On démontre que la différence entre le rendement certain R_c est égal à la covariance entre l'action i et le portefeuille du marché T multipliée par une constante K .

$$E_i - R_c = K \cdot \text{Cov}_{iM} \quad (3.2.4)$$

La covariance du portefeuille du marché avec lui-même est égal à la variance du portefeuille, donc

$$E_M - R_c = K \sigma_M^2 \quad (3.2.5)$$

d'où

$$K = \frac{E_M - R_c}{\sigma_M^2} \quad (3.2.6)$$

En remplaçant K par sa valeur dans l'équation (3.2.4)

$$E_i - R_c = \frac{E_M - R_c}{\sigma_M^2} \cdot \text{Cov}_{iM}$$

Cette équation est valable pour tous les portefeuilles qui se trouvent sur la ligne de marché.

1. W. F. SHARPE, *Capital Asset Prices : A theory of Market Equilibrium under conditions of Risk*, op. cit., J. LINTNER, *Security Prices, Risk and Maximal gains from Diversification*, Journal of Finance, décembre 1965.

Ces portefeuilles situés sur la ligne de marché sont parfaitement corrélés avec le portefeuille du marché, n'ont pas de risque spécifique. Ils ont seulement un risque diversifiable complètement compensé ⁽¹⁾.

Pour les portefeuilles situés sous la ligne de marché, le prix du risque du marché ne représente qu'une partie du risque total : celle correspondant au risque systématique $\frac{\text{Cov}_{iM}}{\sigma_M^2}$ dû à la covariance de ce titre avec le portefeuille du marché.

Comme le facteur étudié plus haut (1.4) est égal au rapport $\frac{\text{Cov}_{iM}}{\sigma_M^2}$, on obtient, à partir de l'équation (3.2.4)

$$E_i - E_c = \beta (E_M - E_c)$$

ou

$$E_i = \beta (E_M - E_c) + E_c$$

Cette dernière relation met en lumière une conséquence importante du modèle de prix des actifs financiers.

Dans un marché efficient, l'espérance mathématique du taux de rendement d'un titre ou d'un portefeuille est fonction seulement du facteur β de ce titre ou de ce portefeuille.

Sans doute, le modèle de marché efficient suppose certaines hypothèses qui sembleront peu réalistes : prêts et emprunts sans limite et à des taux sans risque, prévisions de rendement des titres identiques pour tous les acheteurs...

Il néglige d'autre part certaines variables dont l'importance est parfois considérable sur le marché : politique économique, politique fiscale, concurrence étrangère, mouvements de capitaux étrangers...

Il est certain qu'au niveau de la théorie pure, l'effort d'intégration du risque dans les calculs financiers n'est pas encore achevé. La théorie s'enrichira d'affinements de ce concept, mais au prix certainement de modèles plus complexes. Mais cela n'implique pas que l'effort de recherche ne soit pas poursuivi.

Josette PEYRARD

Docteur ès sciences économiques